XIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 2 день

6. *У уголка из трёх клеток центральной назовём клетку, соседнюю по стороне с двумя другими. Существует ли клетчатая фигура, которую можно разбить на уголки из трех клеток тремя способами так, чтобы каждая ее клетка в одном из разбиений была центральной в своем уголке?* (Д. Демин)

Ответ. Существует. **Решение**. Вырежем у квадрата 4×4 угловые клетки. Легко проверить, что получившуюся фигуру можно разбить на уголки ровно тремя способами, и условие задачи для них выполняется.

7. *Точка M — середина стороны AC равностороннего треугольника ABC. Точки P и R на отрезках AM и BC соответственно выбраны так, что $AP = BR$. Найдите сумму углов ARM, PBM и BMR.* (С. Берлов)

Ответ. 60°. **Решение**. Пусть отрезки AR и BM пересекаются в точке Q. Так как треугольники ABP и BAR равны по первому признаку, $\angle BAR = \angle ABP = \alpha$. Тогда $\angle ARM+\angle BMR = 180°-\angle AQB = 2\alpha+\angle PBM$ (здесь первое равенство — теорема о внешнем угле для треугольника MQR, а второе — теорема о сумме углов для треугольника AQB), откуда $\angle ARM+\angle BMR+\angle PBM = 2(\alpha+\angle PBM) = 2\angle ABM = 60°$.

8. *Сначала Саша прямолинейными разрезами, каждый из которых соединяет две точки на сторонах квадрата, делит квадрат со стороной 2 на 2020 частей. Затем Дима вырезает из каждой части по кругу. Докажите, что Дима всегда может добиться того, чтобы сумма радиусов этих кругов была не меньше 1.* (А. Кузнецов)

Решение. Впишем в квадрат круг радиуса 1 и проведем первый разрез. Если он не заденет вписанный круг, вырежем любой круг из части квадрата, не содержащей исходного круга. В противном случае разрез делит исходный круг на два сегмента. Заменим исходный круг двумя вписанными в эти сегменты кругами. Точки их касания с границей исходного круга — концы его диаметра, содержащего середину общей хорды сегментов, где вписанные в сегменты круги касаются друг друга. Теперь проведем второй разрез, рассмотрим пересеченные им части квадрата, получившиеся после первого разреза, и применим к каждой из них описанный выше алгоритм. Далее проделаем то же самое для третьего разреза и т. д. Очевидно, сумма радиусов выбранных кругов при этом не убывает, и после 2020-го разреза она будет не меньше 1.

9. *Дано натуральное число n, большее 2. Докажите, что если число $n!+n^3+1$ — простое, то число n^2+2 представляется в виде суммы двух простых чисел.* (Д. Демин)

Решение. Как известно, $n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1)$. Так как оба сомножителя в правой части тут меньше, чем $(n+1)^2$, если один из них — составное число, то у него есть делитель d, больший 1, но не больший n. Но тогда и число $n!+n^3+1$ делится на d, что противоречит его простоте. Значит, числа n^2-n+1 и $n+1$ — простые, а в сумме они как раз дают n^2+2.

10. *В квадратной таблице 2021×2021 стоят натуральные числа. Можно выбрать любой столбец или любую строку в таблице и выполнить одно из следующих действий: 1) Прибавить к каждому выбранному числу 1. 2) Разделить каждое из выбранных чисел на какое-нибудь натуральное число. Можно ли за несколько таких действий добиться того, чтобы каждое число в таблице было равно 1?* (М. Дидин)

Ответ. Можно **Решение**. Докажем, что можно сделать первые k столбцов одинаковыми, индукцией по k. *База* — $k = 1$. *Переход*. Пусть первые k столбцов одинаковы. Будем прибавлять к $(k+1)$-ому столбцу 1 до тех пор, пока каждое число в нём не станет больше, чем соседнее число в k-ом столбце. Теперь рассмотрим m-ую строку. Пусть на пересечении её с k-ым столбцом стоит a, а на пересечении с $(k+1)$-ым столбцом — $b > a$. Пусть a при делении на $b-a$ дает остаток r. Прибавим к m-ой строке $b-a-r$ единиц. Теперь первые $k+1$ чисел в ней делятся на $b-a$. Далее прибавим к каждому из столбцов, начиная с $(k+2)$-го, по нескольку единиц так, чтобы все оставшиеся числа m-ой строки тоже стали делиться на $b-a$, после чего разделим m-ую строку на b-a. Заметим, что в итоге первые k чисел m-ой строки остались равными, а $(k+1)$-ое ее число стало на единицу больше каждого из них. Проделаем такую операцию с каждой строкой таблицы. Поскольку к первым $k+1$ столбцам на каждом этапе 1 добавляется одинаковое количество раз, окажется, что первые k столбцов, по-прежнему равны, а $(k+1)$-ый — на 1 больше. Прибавив по 1 к первым k столбцам, завершим переход индукции. Когда все столбцы таблицы равны и в каждой строке все элементы одинаковы, завершаем решение делением каждой строки на её элемент.